HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Seminar

Präferenzaggregation durch Wählen:
Algorithmik und Komplexität

---

# Charakterisierung von Runoff Voting Rules

---

*Autor:*
Daniel Braune

*Heinrich-Heine-Universität*
Düsseldorf

5. Juni 2015

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Einführung

In diesem Paper beschäftige ich mich mit der Charakterisierung von Runoff Voting Rules. Insbesondere gehe ich auf das Wahlsystem STV (single transferable vote) ein, stelle es vor und will es charakterisieren. Mein Ziel ist es, zu zeigen, dass STV die einzige Runoff Scoring Rule ist, die die Konsistenz in der Letztstimme, die Unabhängigkeit von Klonen, sowie die Unabhängigkeit in der Letztstimme erfüllt.

# 2 Definition *social preference function* (SPF) [1]

Sei A eine endliche Menge von Kandidaten. Die Menge aus allen Rankings aus A ist definiert als L(A). Sei N nun eine endliche Menge von Wählern. Die Präferenz des Wählers $i \in N$ ist gegeben durch $R_i \in L(A)$. Ein Präferenzprofil ist eine Liste $R \in L(A)^n\ mit\ \mid N \mid = n$, welche ein Ranking $R_i$ für jeden Wähler $i \in N$ angibt. Zuerst möchte ich noch definieren, dass für ein Ranking $r = (a_1, a_2, ..., a_m)$ mit $m \in N$ das letzte Element als *bottom element*, oder $bottom(r)$ bezeichnet wird. Für dieses Ranking wäre also $bottom(r) = a_m$. Wenn M eine Menge von Rankings ist, dann ist $bottom(M) = M'$, wobei $M'$ die Menge aller Letztstimmen der Rankings aus $M$ ist. Sei $r$ ein gegebenes Ranking.

Eine SPF verbindet mit jedem Präferenzprofil eine nicht leere Menge
$f(R) \subseteq L(A)$ mit Rankings von A.
Daraus folgt:
• schwache Einstimmigkeit, wenn $R_i = r$ für $\forall i \in N \Longrightarrow r \in f(R)$,
• schwache Entschlossenheit, wenn ein Präferenzprofil R mit mindestens zwei Alternativen mit $|f(R)| = 1$ existiert,
• Kontinuität der Letztstimme (bottom), wenn für jede zwei Präferenzprofile R und R' mit $bottom(f(R)) = \{a\}, \exists k \in N \Longrightarrow bottom(f(kR \cup R')) = \{a\}$.
Eine SPF verbindet mit jedem Präferenzprofil eine nicht leere Menge
$f(R) \subseteq L(A)$ mit Rankings von A.

*neutral* ist eine SPF genau dann, wenn man die Kandidaten beliebig vertauschen kann, ohne das Ergebnis zu verändern. *anonym* ist eine SPF genau dann, wenn man die Wähler beliebig vertauschen kann, ebenfalls ohne das Ergebnis zu verändern. Die hier betrachtete SPF ist symmetrisch, was definiert bedeutet, dass sie sowohl *neutral* als auch *anonym* sind.

Desweiteren betrachten wir als $Runoff\ Scoring\ Rule$ jene Wahlsysteme, die nach dem ersten Durchgang einen oder mehrere Kandidaten eliminieren und mit den verbliebenen Kandidaten in einen 'Runoff' (Ausscheidungsverfahren) gehen, bis am Ende ein Ranking über die angetretenen Kandidaten ausgegeben wird.
Als $SCF$ bezeichne ich eine $Social\ Choice\ Funktion$, welche mit jedem Präferenzprofil R eine nicht-leere Menge $f(R) \subseteq A$ an Kandidaten verknüpft.

# 3 Wahlsystem: STV (single-transferable-vote)

Vorraussetzung für STV ist, dass als Wählerstimme eine vollständige Präferenzliste/Ranking über alle Kandidaten vorhanden ist[2]. STV durchläuft verschiedene Runden, mindestens eine, jedoch maximal so viele Runden, wie es Kandidaten gibt. In der ersten Runde wird in jeder Wählerstimme nur die Erststimme gezählt (genauso wie bei der Pluralitätswahl). Hat ein Kandidat nun die absolute Mehrheit, sprich mehr als die Hälfte der Erststimmem, ist dieser automatisch der Sieger der Wahl. In diesem Fall werden keine weiteren Runden durchlaufen. Hat kein Kandidat nach der ersten Runde die absolute Mehrheit, wird der Kandidat ermittelt, welcher die wenigsten Erststimmen erhalten hat. Dieser Kandidat wird nun gestrichen und fällt in der nächsten Runde in allen Wählerstimmen weg (bedeutet, dass der Kandidat mit dem niedrigsten Pluralityscore gestrichen wird). Sollte es einen Gleichstand geben, entscheidet eine Tie-breaking Regel, die vorher definiert wurde. Kandidaten, die hinter dem gestrichenen Kandidaten standen, rücken nun einen Platz nach vorne. Nun geht das Wahlsystem in die zweite Runde. Aus den neuen Wählerstimmen, die durch das Streichen entstanden sind, werden nun erneut die Erststimmen der einzelnen Kandidaten bestimmt. Nun verläuft das Schema wie in der ersten Runde. Sollte ein Kandidat nun die absolute Mehrheit erreicht haben, ist er der Sieger der Wahl. Ist das nicht der Fall, wird erneut der Kandidat mit den wenigsten Erststimmen gestrichen. Dies wird so lange wiederholt, bis ein Kandidat die absolute Mehrheit in den Erststimmen hat und die Wahl gewinnt. STV gibt dann ein Ranking über die Platzierung der einzelnen Kandidaten aus.

## Beispiel **Gewinnerwahl durch STV**

Betrachten wir die fünf Rankings $w_1$, $w_2$, $w_3$, $w_4$ und $w_5$ und die drei Kandidaten $a$, $b$ und $c$:

$$\begin{array}{llll} w_1: & a & b & c \\ w_2: & b & a & c \\ w_3: & c & b & a \\ w_4: & b & c & a \\ w_5: & c & b & a \end{array}$$

Es fällt auf, dass kein Kandidat die absolute Mehrheit bezüglich der Erststimmen erreicht (dies wären im Falle von fünf Wählern drei oder mehr Stimmen).

Nun werden die Erststimmen der einzelnen Kandidaten gezählt:

$$a: \; 1 \qquad b: \; 2 \qquad c: \; 2$$

Es wird deutlich, dass kein Kandidat mit mindestens 3 Stimmen die absolute Mehrheit hat. Kandidat $a$ hat aber mit einer Erststimme die geringste Anzahl an Erststimmen und wird somit in allen fünf Wählerstimmen gestrichen.

Folgende Profile entstehen:

$$\begin{array}{lll} w_1\colon & b & c \\ w_2\colon & b & c \\ w_3\colon & c & b \\ w_4\colon & b & c \\ w_5\colon & c & b \end{array}$$

Wenn man nur erneut die Erststimmen zählt, wird deutlich, dass $b$ nun drei Erststimmen hat und somit mit der absoluten Mehrheit der Erststimmen diese Wahl gewinnt. STV gibt im diesem Fall das Ranking $(b, c, a)$ aus.

## tie-breaking-rule PUT

Problematisch wird es, wenn zwei oder mehr Kandidaten die gleiche Anzahl an wenigsten Erststimmen hat. In diesem Fall tritt ein tie-break ein, was bedeutet, dass eine vordefinierte Regel angewendet wird, um eine Entscheidung zu ermitteln. Ich beschäftige mich hier mit der tie-breaking Regel PUT.
PUT gibt die Menge an Rankings an, die möglich sind, um die Wahl zu entscheiden. Das heißt, wir betrachten alle Kandidaten, die beispielsweise bei Plurality den niedrigsten Score haben und schauen nacheinander, welches Ranking entsteht, wenn wir erst den einen und dann den anderen Kandidaten löschen. PUT gibt in diesem Fall eine Menge an Rankings aus (für jede Möglichkeit ein Ranking).

## Beispiel **tie-breaking mit PUT**

Sei R die Menge an Rankings. Betrachten wir die sieben Rankings und die drei Kandidaten $a$, $b$ und $c$:

$$\begin{array}{llll} 3x\colon & c & b & a \\ 2x\colon & a & b & c \\ 2x\colon & b & a & c \end{array}$$

Beispiel aus [3], Seite 1402

Im ersten Schritt haben nun Kandidat $a$ und Kandidat $b$ den niedrigsten Pluralityscore. Nun werden sich die Möglichkeiten angeschaut, die jeweils einen Kandidaten zum bestplatzierten Kandidaten machen. Streicht man in diesem Beispiel Kandidat $a$, wird Kandidat $b$ im Ranking an erster Stelle stehen (Ranking: $(b, c, a)$). Streicht man $b$, wird $a$ im Ranking an erster Stelle stehen (Ranking: $(a, c, b)$). PUT würde in diesem Fall die Menge an Rankings

$$\{(b, c, a), (a, c, b)\}$$

ausgeben.[3]

# 4 Axiomatische Charakterisierung von STV

Nun möchte ich drei Axiome vorstellen, um STV zu charakterisieren.

## Definition **Unabhängigkeit von Letztstimmen [1]**

Sei $r \in L(B)$ ein Ranking und $a \notin B$ eine Alternative. Dann bezeichnet $(r, a)$ das Ranking von $B \cup \{a\}$, sodass $a$ hinten an das Ranking hinzugefügt wird und somit gilt $bottom((r, a)) = a$. Eine SPF $f$ erfüllt die Unabhängigkeit von Letztstimmen, falls für alle Profile R gilt:

$$f(R) = \bigcup_{a \, \in \, bottom(f(R))} \{(r, a) : r \in f(R|A \backslash \{a\})\}$$

Ein Wahlprofil kann also rekusiv konstruiert werden, in dem man durch eine neue Letztstimmen mit einen neuem Kandidaten, der bisher nicht im Wählerprofil vorkam, ans Ende des Rankings hinzufügt. Die Gewinnermenge soll dadurch unabhängig bleiben.

Betrachten wir nun diese Definition 3.1 an einem Beispiel bei STV.

## Beispiel **Unabhängigkeit von Letztstimmen**

Betrachten wir die drei Rankings $w_1$, $w_2$ und $w_3$ sowie die drei Kandidaten $a, b$ und $c$.

$$\begin{array}{llll} w_1: & a & b & c \\ w_2: & b & a & c \\ w_3: & a & c & b \end{array}$$

sowie das veränderte Profil mit zusätzlich hinzugefügtem Kandidaten $m$ in der letzten Stimme:

$$\begin{array}{lllll} w_1: & a & b & c & m \\ w_2: & b & a & c & m \\ w_3: & a & c & b & m \end{array}$$

STV-Gewinner ist nach der ersten Runde in beiden Profilen jedoch bereits $a$, da $a$ jeweils die Mehrheit der Erststimmen hat. Dies Unabhängig von der Einführung eines neuen Kandidatens $m$ in der Letztstimme.

Das zweite Axiom ähnelt der Konsistenz. Zur Erinnerung: Ein Wahlsystem ist genau dann *konsistent*, falls folgenden Eigenschaften erfüllt sind: Teilt man die Wähler in zwei oder mehr Gruppen auf, und ein Kandidat gewinnt in all diesen Teilwahlen, dann gewinnt er auch die Gesamtwahl (in der alle Wähler mit derselben Präferenz abstimmen, wie in den Teilwahlen).[2]

## Definition **Konsistenz für Letztstimmen [1]**

Sei f eine SPF. f erfüllt die Konsistenz für Letztstimmen für

$$\forall R \in L(A)^N, \forall R' \in L(A)^{N'}, N \cap N' = \emptyset,$$
$$bottom(f(R \cup R')) = bottom(f(R)) \cap bottom(f(R'))$$

immer dann, wenn RHS (die rechte Seite) nicht leer ist.

**Beispiel**

Seien die Rankings $w_1 :\ a\ b\ c$ und $w_2 :\ b\ c\ a$ gegeben. Dann gilt:

$(\Leftarrow)$
$bottom(f(\{a, b, c\} \cup \{b, c, a\})) = bottom(\{(a, b, c), (b, a, c)\}) = \{c\}$

$(\Rightarrow)$
$bottom(f(\{a, b, c\})) = bottom(\{(a, b, c), (a, c, b)\}) = \{c, b\}$
$bottom(f(\{b, c, a\})) = bottom(\{(b, c, a), (b, a, c)\}) = \{a, c\}$
Also $\{c, b\} \cap \{a, c\} = \{c\}$

$\Rightarrow bottom(f(\{a, b, c\} \cup \{b, c, a\})) = bottom(f(\{a, b, c\})) \cap bottom(f(\{b, c, a\}))$

## Definition **Unabhängigkeit von Klonen [1]**

Definieren wir $\lceil R \rceil c$ als Menge aller Rankings, die wir durch das Löschen von allen Klonen und das Ersetzten von einem Kandidaten $a$ an der Position, wo der bestplatzierte Klon in $r$ gesetzt war.
Sei f eine SPF. f ist unabhängig von Klonen, wenn für alle Wählerprofile R und alle geklonten C,

$$\lceil f(R^C) \rceil c = f(R)$$

Betrachten wir nun die Definition 3.3 anhand eines Beispiels bei STV.

## Beispiel STV und die Unabhändigkeit von Klonen

Betrachten wir die fünf Rankings $w_1$, $w_2$, $w_3$, $w_4$ und $w_5$ und die drei Kandidaten $a$, $b$ und $c$, hierzu außerdem einen Klon von $a$, den ich $a'$ nenne und jeweils hinter $a$ platziere:

$$\begin{array}{lcccc} w_1: & a & a' & b & c \\ w_2: & b & a & a' & c \\ w_3: & c & b & a & a' \\ w_4: & b & c & a & a' \\ w_5: & c & b & a & a' \end{array}$$

Es wird deutlich, dass $a'$ den niedrigsten Pluralityscore hat (null Erststimmen)und eliminiert wird. Der Gewinner ermittelt sich ab der zweiten Runde analog zu Beispiel 2.1.

Betrachten wir nun erneut die axiomische Charakterisierung von STV mit Hilfe dieser drei Definitionen. Ich möchte nun zeigen, dass STV die einzige symmetrische SPF ist, die alle drei Axiome erfüllt.

# 5 Theorem und Beweise

## Theorem

STV ist die einzige, symmetrische SPF, die Unabhängigkeit von Letztstimmen, Konsistenz in der Letztstimme, Unabhängigkeit von Klonen sowie Definition 2 erfüllt.
Beginnen möchte ich mit Unabhängigkeit von Letztstimmen und Konsistenz von Letztstimmen.

## Beweis Unabhängigkeit und Konsistenz von Letztstimmen

Zuerst möchte ich zeigen, dass jede Runoff-Scoring-Rule die Unabhängigkeit und die Konsistenz in der Letztstimme erfüllt. Sei $f$ eine SPF und $s$ die Reihenfolge der Score-Vektoren von f. Jede Funktion $f$ erfüllt genau dann die Unabhängigkeit und die Konsistenz von Letztstimmen, wenn sie eine Runoff-Scoring-Rule ist. Unabhängigkeit in der Letztstimme folgt unmittelbar aus der Definition einer Runoff-Scoring-Rule (und von der Annahme, dass PUT im Falle eines Gleichstandes angewendet wird). Für die Konsistenz für Letztstimmen sehen wir, dass die Menge der Letztstimmen ($bottom(f(R))$) mit der Menge der Gewinner für eine Scoring-Rule $\overline{s}$ mit $\overline{s}_j^k = -\overline{s}_j^k$ für $\forall\, 1 \leq j \leq k$. Alle Scoring-Rules sind konsistent (Smith, Young). Konsistenz von $\overline{s}$ impliziert die Konsistenz in der Letztstimme.

Nun möchte ich die andere Richtung zeigen. Sei $f$ also eine SPF, die die Konsistenz und die Unabhängigkeit in der Letztstimme erfüllt. Unabhängigkeit der Letztstimme impliziert, dass $f$ einen einzigen Gewinner als SCF (die ich $g$ nenne) hat, die $bottom(f(R))$ wählt. Die Symmetrie von f impliziert, dass $g$ ebenfalls symmetrisch ist. Die Kontinuität der Letztstimme impliziert die Kontinuität von $g$, ebenfalls impliziert die Konsistenz von $f$ in der Letztstimme die Konsistenz von $g$. Daher kann das Resultat[1, Lemma 1] angewendet werden, welches besagt, dass eine symmetrische SCF ist kontinuierlich und konsistent, genau dann wenn es eine Scoring-Rule ist. Daraus folgt, dass $bottom(f(R))$ wird durch die Scoring-Rule gewählt. $\Rightarrow f$ ist dementsprechend eine Runoff-Scoring-Rule.
[1, Lemma 1]

## Beweis **Unabhängigkeit von Klonen**

Sei $s$ eine schwach, entschlossene Runoff Scoring Rule, die die Unabhängigkeit von Klonen erfüllt und $s^n$ für $n \in$ N ein Scoring Vektor, welcher für $n$ Posotionen die jeweiligen Punkte angibt, welcher ein Kandidat an dieser Position bekommt. Dann gilt:

$\forall\ n \geqslant 3, s^n = (x_n, 0, ..., 0, y_n)\ mit\ x_n \geqslant 0, y_n \geqslant 0,\ und\ x_n y_{n+1} = x_{n+1} y_n.$
[1, Lemma 5]

Eine Runoff Scoring Rule ist genau dann unabhängig von Klonen, wenn genau einer der vier folgenden Punkte zutrifft:

$s^2 = (1, 0)\ und\ s^k = (x, 0, ..., 0, 1)\ f\ddot{u}r\ alle\ k \geqslant 3\ und\ einem\ x \geqslant \frac{1}{2}.$
$s^2 = (0, 1)\ und\ s^k = (1, 0, ..., 0, x)\ f\ddot{u}r\ alle\ k \geqslant 3\ und\ einem\ x \geqslant \frac{1}{2}.$
$s^k = (1, 0, ..., 0)\ f\ddot{u}r\ alle\ k \geqslant 2.$
$s^k = (0, ..., 0, 1)\ f\ddot{u}r\ alle\ k \geqslant 2.$
[1, Lemma 6]
Wir haben nun gezeigt, dass STV all diese Eigenschaften erfüllt. Nun muss noch gezeigt werden, dass STV die einzige SPF, die all diese Eigenschaften erfüllt.

## Beweis **[1, Theorem 1]**

Wir wissen nun, dass jede SPF von diesem Typ eine Runoff Scoring Rule ist. Wir haben außerdem Runoff Scoring Rules charakterisiert, die Unabhängig von Klonen sind (s. Def). Daraus kann geschlossen werden, dass nur STV die schwache Einstimmigkeit erfüllt (siehe Def. 2). Wenn eine Runoff Scoring Rule $s$ dies erfüllt, dann gilt $s^n_{n-1} \geqslant s^n_n$, $\forall n \geqslant 2$. Angenommen dies trifft nicht zu für ein $n \in N$ und besteht ein Profil aus einem einzelnen Wähler mit der Präferenz $(a_1, ..., a_n)$ über den n-Alternativen, dann ist $a_n$ nicht der erste Kandidat, der eliminiert wird, bis $s^n_{n-1} < s^n_n$. Dies verletzt die schwache Einstimmigkeit. Daher verletzten alle anderen Regeln aus dem Beweis der Unabhängigkeit von Klonen außer STV die schwache Einstimmigkeit.

# 6 Schlussfolgerung

Letztendlich haben wir nun STV kennengelernt. Wir haben gesehen, dass STV eine Runoff-Scoring-Rule ist und anhand STV gesehen, wie eine solche funktioniert. Ich habe bewiesen, dass STV unabhängig von Klonen ist und somit die Wahl bezüglich dieses Punktes nicht manipuliert werden kann. Außerdem habe ich gezeigt, dass STV unabhängig von seiner Letztstimme ist. Es ist irrelevant, welche neue Stimme ich an alle Profile anhänge, das Wahlergebnis wird davon nicht beeinflusst. STV erfüllt, wie wir gesehen haben, außerdem die Konsistenz in der Letztstimme. Somit habe ich gezeigt, dass STV die einzige SPF ist, die genau diese Punkte (Konsistenz in der Letztstimme, die Unabhängigkeit von Klonen, sowie die Unabhängigkeit in der Letztstimme) erfüllt.

# Literaturverzeichnis

[1] Paper
**On the Axiomatic Characterization of Runoff Voting Rules**
*R.Freeman, M.Brill, V.Conitzer*
Department of Computer Science
Duke University, Burham, USA
In the Proceeding of the 28th AAAI Conference on Artificial Intelligence, 675-681,2014

[2] Buch
**Einführung in Computational Social Choice**
*J.Rothe, D.Baumeister, C.Lindner, I.Rothe*
Spektrum, Akademischer Verlag, Auflage 2012, ISBN 978-3-8274-2570-6

[3] Paper
**General Tiebreaking Schemes for Computational Social Choice**
*R.Freeman, M.Brill, V.Conitzer*
Proceedings of the 14th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS 2015), Bordini, Elkind, Weiss, Yolum (eds.), May 4–8, 2015, Istanbul, Turkey.